Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
14 novembre 2017
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes collège standards autorisées

1. (6pts) **Questions courtes :**

   (a) Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace s'écrit $V(x, y) = C\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2}$ où C est une constante. Trouver le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y)$ associé.

   $$\vec{\boldsymbol{E}}(x, y) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(x, y) = -\widehat{\boldsymbol{u}}_x \frac{\partial V}{\partial x} - \widehat{\boldsymbol{u}}_y \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{Cx}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}\widehat{\boldsymbol{u}}_x + \frac{Cy}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}\widehat{\boldsymbol{u}}_y \qquad \text{V.m}^{-1}$$

   (b) Spécifier les dimensions S.I. de la constante C dans l'exercice (a). $\qquad [C] = \text{V.m.}$

   (c) Un champ électrique dans une région de l'espace est de la forme $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = C\left[xy\widehat{\boldsymbol{u}}_x + 2yz\widehat{\boldsymbol{u}}_y + 3zx\widehat{\boldsymbol{u}}_z\right]$, où C est une constante ayant des unités appropriées. Trouver la densité volumique de charge associée avec ce champ.

   $$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div}\,\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = C\left[y + 2z + 3x\right] \Rightarrow \rho = \epsilon_0 C\left[y + 2z + 3x\right]\text{C.m}^{-3}$$

   (d) On considère des condensateurs de 4μF et 2μF connectés en série. La capacité équivalente vaut :
   a) 6 μF b) 0,75 μF c) 2 μF d) 1,33 μF

   $$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{10^6}{4} + \frac{10^6}{2} = \frac{3}{4}10^6 \Rightarrow C_{\text{eq}} = \frac{4}{3}10^{-6} \simeq 1,33\mu\text{F}$$

   (e) Ajouter un diélectrique entre les armatures d'un condensateur a l'effet de :
   a) augmenter sa capacité b) diminuer sa capacité c) ne rien changer d) annuler sa capacité

   (f) On appelle un Joule par Coulomb un :
   a) Gauss b) Farad **c) Volt** d) Ampère

2. (4pts)

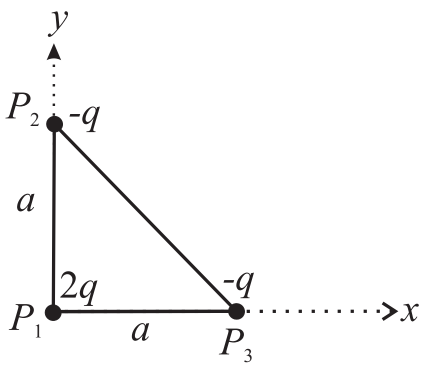
   (a) On considére un champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}(x, y, z) = \frac{E_0}{c}\left[x(1 - \frac{z}{c})\widehat{\boldsymbol{u}}_z + y(1 + \frac{z}{c})\widehat{\boldsymbol{u}}_y\right]$ où E_0 est une constante avec les dimensions du champ électrique et c est une constante avec les dimensions de longueur. Trouver le flux du champ électrique Φ_e, à travers une surface rectangulaire, S, $(z = 0,\ x \in (0, a),\ y \in (0, b))$ dans le plan xOy.

   $$\vec{d\boldsymbol{S}} = dS\widehat{\boldsymbol{u}}_z = dxdy\widehat{\boldsymbol{u}}_z$$
   $$\Phi_e = \iint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = \iint_{z=0} \frac{E_0}{c}\left[x(1 - \frac{z}{c})\widehat{\boldsymbol{u}}_z + y(1 + \frac{z}{c})\widehat{\boldsymbol{u}}_y\right] \cdot \widehat{\boldsymbol{u}}_z dxdy = \frac{E_0}{c}\int_0^a xdx \int_0^b dy$$
   $$= \frac{E_0}{c}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \times [y]_0^b = \frac{E_0}{c}\frac{ba^2}{2} \qquad [\text{V.m}]$$

   (b) On considère un condensateur plan rectangulaire (sans diélectrique) de dimensions 36cm par 31,4cm avec une séparation des armatures de $d = 1$mm, ainsi qu'une différence de potentiel de $10V$. Trouver la capacité C, du condensateur et le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ entre les armatures (A.N. et unités : rappel $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \times 10^9$ S.I. $[\text{F}^{-1}.\text{m}]$).

   $$C = \frac{S\epsilon_0}{d} = \frac{(36 \times 31.4)\,\epsilon_0}{10^{-3}}10^{-4} \simeq (9 \times 4 \times \pi \times 10)\,\epsilon_0 10^{-1} = 9 \times 4\pi\epsilon_0 = \frac{9}{9 \times 10^9} = 10^{-9}\text{F} = 1\text{nF}$$
   $$U = 10V = \int_1^2 \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{l}} = \left|\vec{\boldsymbol{E}}\right| d \Rightarrow \left|\vec{\boldsymbol{E}}\right| = \frac{U}{d} = 10^4 \qquad [\text{V.m}^{-1}]$$

3. (5pts) On considère un système de 3 charges ponctuelles posées aux sommets (P_1,P_2,P_3) d'un triangle droit isocèle represénté dans la figure ci-dessous ($q_1 = 2q$, $q_2 = q_3 = -q$).
Exprimer vos réponses à (a)-(d) ci-dessous en fonction de : q, ϵ_0, **et** a **, et spécifier les unités des réponses**.



(a) Trouver la force (en coordonnées cartésiennes) sur la charge $q_2 = -q$ à la position P_2.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{\rightarrow 2} = q_2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1 (P_2) + q_2 \overrightarrow{\boldsymbol{E}}_3 (P_2) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 \overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right|^3} + \frac{q_3 \overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_2}}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_2}}\right|^3} \right)$$

$$= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a2q}{a^3} \widehat{\boldsymbol{u}}_y - q \frac{-a\widehat{\boldsymbol{u}}_x + a\widehat{\boldsymbol{u}}_y}{(a^2 + a^2)^{3/2}} \right) = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2} \left(\left(8 - \sqrt{2}\right) \widehat{\boldsymbol{u}}_y + \sqrt{2}\widehat{\boldsymbol{u}}_x \right) \mathrm{N}$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\left(\sqrt{2} - 8\right) \widehat{\boldsymbol{u}}_y - \sqrt{2}\widehat{\boldsymbol{u}}_x}{4} \quad [\mathrm{N}]$$

(b) Trouver le potentiel électrique, V_1, V_2, V_3, à la position de chacun des trois sommets créé par les autres charges du triangle.

$$V_1 \equiv V_1 (P_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right|} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_3}}\right|} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad [\mathrm{V}]$$

$$V_2 \equiv V_2 (P_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\right|} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_3}}\right|} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2} \right) \quad [\mathrm{V}]$$

$$V_3 \equiv V_3 (P_3) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_3}}\right|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_3}}\right|} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2} \right) = V_2 \quad [\mathrm{V}]$$

(c) Trouver l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_e$, du système.

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_1 V_2 + q_3 V_3) = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left(4 + 2 \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2} \right) \right) = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left(8 - \sqrt{2} \right) [\mathrm{J}]$$

(d) Trouver le moment dipolaire du système entier, $\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{3} q_i \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_i$, en coordonnées cartésiennes. (On se rappelle que $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ ne dépend pas du choix d'origine - puisque la charge totale du système est nulle).
On place O à l'origine du dessein et on trouve :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{3} q_i \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_i = q_1 \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_1 + q_2 \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_2 + q_3 \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}_3 = -qa \left(\widehat{\boldsymbol{u}}_y + \widehat{\boldsymbol{u}}_x \right)$$

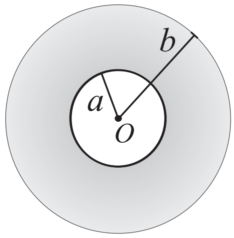
$$= -qa\sqrt{2} \left(\frac{\widehat{\boldsymbol{u}}_y + \boldsymbol{u}_x}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow |\boldsymbol{p}| = -qa\sqrt{2} \quad [\mathrm{C.m}]$$

Il est intéressant de remarquer que la distance entre les barycentres des charges postives et négatives est $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et que l'amplitude du moment dipolaire selon le modèle de dipôle idéal est $|\overrightarrow{\boldsymbol{p}}| = 2q \times d = qa\sqrt{2}$, ce qui est bien en accord avec notre résultat.

4. (5pts) **Champ électrostatique**

On considère un système avec des distributions de charges volmiques ρ, et surfaciques σ (inconnues), à symétrie sphérique qui génèrent le potentiel électrique V, suivant :

$$V(r) = \begin{cases} C\left[\frac{b^2-a^2}{b^3}\right] & r < a \\ Cr^2\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}\right] & a < r < b \\ \frac{C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right]}{r} & r > b \end{cases}$$



où C est une constante (en V.m).

(a) Déterminer le champ électrostatique, $\vec{\boldsymbol{E}}(r)$, dans chacune des trois régions (c.-à-d. dans les régions $r < a$, $b > r > a$, et $r > b$).

$$\vec{\boldsymbol{E}}(r) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} V(r) = \vec{\boldsymbol{u}}_r \times \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} C\left[\frac{b^2-a^2}{b^3}\right] & = \mathbf{0} & r < a \\ -C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}\right]\frac{\partial r^2}{\partial r} & = -C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}\right] 2r\widehat{\boldsymbol{u}}_r & a < r < b \\ -C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right]\frac{\partial}{\partial r} r^{-1} & = C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right] r^{-2}\widehat{\boldsymbol{u}}_r & r > b \end{cases} \quad [\mathrm{V.m^{-1}}]$$

(b) Déterminer la charge totale contenue dans la région $r \leq b$ (c-à-d. $r < b + \varepsilon$, avec $\varepsilon \to 0$).
La charge $Q_{r\leq b}$ se trouve en appliquant le théorème de Gauss sur un sphère de rayon $r = b + \varepsilon$ où $d\vec{\boldsymbol{S}} = dS\widehat{\boldsymbol{u}}_r$:

$$\begin{aligned} Q_{r\leq b} &= \epsilon_0 \iint_{r=b+\varepsilon} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \epsilon_0 C \left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right] \iint_{r=b+\varepsilon} r^{-2} dS = \epsilon_0 C \left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right] \frac{1}{b^2} 4\pi b^2 \\ &= 4\pi\epsilon_0 C \frac{b^2-a^2}{a^2} \quad [\mathrm{C}] \end{aligned}$$

(c) Déterminer la charge totale contenue dans la région $r \leq a$ (c-à-d. $r < a + \varepsilon$, avec $\varepsilon \to 0$).
La charge $Q_{r\leq a}$ se trouve de nouveau en appliquant le théorème de Gauss mais sur un sphère de rayon $r = a + \varepsilon$:

$$\begin{aligned} Q_{r\leq a} &= \epsilon_0 \iint_{r=a+\varepsilon} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = -\epsilon_0 C \frac{b^2-a^2}{a^2b^3} \iint_{r=a+\varepsilon} 2r dS = -\epsilon_0 C \left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}\right] 2a4\pi a^2 \\ &= -4\pi\epsilon_0 C \frac{b^2-a^2}{b^3} 2a \quad [\mathrm{C}] \end{aligned}$$

(d) Déterminer la charge totale contenue dans une région sphérique de rayon $r = a - \varepsilon$ et $a < r < b$ respectivement.

$$Q_{r<a} = \epsilon_0 \iint_{r<a} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = 0 \qquad r < a$$

$$Q_{r<b} = \epsilon_0 \iint_{a<r<b} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = -C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}\right] \epsilon_0 \iint_{a<r<b} 2r dS = -C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^3}\right] 8\pi\epsilon_0 r^3 \quad a < r < b$$

(e) Déterminer les charges surfaciques σ, sur les surfaces $r = b$ et $r = a$.

Il y a deux façons d'arriver. Une première façon est de déduire de l'exercice (d) que :

$$Q_{a-\varepsilon} = 0 \quad , \quad Q_{b-\varepsilon} = -C8\pi \left[\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right]$$

En prenant le resultat de (b), on trouve :

$$\begin{aligned} Q_{r=b} &= Q_{r\leq b} - Q_{b-\varepsilon} = C4\pi\epsilon_0 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3}\right) 3b^3 \\ \Rightarrow \sigma_{r=b} &= \frac{Q_{r=b}}{4\pi b^2} = \frac{12\pi\epsilon_0 C \left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}{4\pi b^2} = 3\epsilon_0 C \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \qquad [\mathrm{C.m}^{-2}] \end{aligned}$$

et avec le resultate de (c) on a de même :

$$\begin{aligned} Q_{r=a} &= Q_{r\leq a} - Q_{a-\varepsilon} = -C8\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} a^3 \\ \Rightarrow \sigma_{r=a} &= \frac{Q_{r=a}}{4\pi a^2} = -C2\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{ab^3} \qquad [\mathrm{C.m}^{-2}] \end{aligned}$$

La deuxième manière de trouver les charges surfaciques est d'invoquer une des relations de continuité entre deux régions :

$$\left(\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{n}}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

We find then :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} &= \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{r>b}(|\boldsymbol{r}| = b) - \vec{\boldsymbol{E}}_{r<b}(|\boldsymbol{r}| = b)\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{u}}_r = C\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} + 2C\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = 3C\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} \qquad [\mathrm{C.m}^{-2}] \\ \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} &= \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{r>a}(|\boldsymbol{r}| = a) - \vec{\boldsymbol{E}}_{r<a}(|\boldsymbol{r}| = a)\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{u}}_r = -2C\left[\frac{b^2 - a^2}{ab^3}\right] \qquad [\mathrm{C.m}^{-2}] \end{aligned}$$

ce qui est bien en accord avec la première méthode (et plus rapide !).

(f) **Bonus :** Déterminer la charge volumique ρ, dans les régions $r < a$, $b > r > a$, et $r > b$, sachant que :

$$\Delta f\,(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right]$$

L'équation de Poisson nous dit que $\rho = -\epsilon_0 \Delta V$. Il suffit donc de calculer ΔV dans chacune des trois régions à partir du potentiel donné dans l'enoncé :

$$\Delta V\,(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} C\left[\frac{b^2-a^2}{b^3}\right] & = 0 & r < a \\ C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2 b^3}\right] \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial r^2}{\partial r}\right) & = 6C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2 b^3}\right] & a < r < b \\ C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right] \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} r^{-1} = -C\left[\frac{b^2-a^2}{a^2}\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} 1 & = 0 & r > b \end{cases}$$

Donc, la charge volumique est :

$$\rho\,(r) = -\epsilon_0 \Delta V = \begin{cases} 0 & r < a \\ -C6\epsilon_0\left[\frac{b^2-a^2}{a^2 b^3}\right] & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases} \qquad [\mathrm{C.m}^{-3}]$$

On remarque que la charge volumique est non-nulle seulement dans la région $a < r < b$.

Ce n'est pas demandé, mais il est intéressant de remarquer que la charge volumique totale est :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{vol}} &= \iiint\limits_{a<r<b} \rho d\mathcal{V} = -C6\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} \left(\frac{4\pi b^3}{3} - \frac{4\pi a^3}{3} \right) \\
&= C8\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} \left(a^3 - b^3 \right)
\end{aligned}$$

On peut donc calculer la charge $Q_{r \leq b}$ comme la somme de trois contributions :

$$\begin{aligned}
Q_{r \leq b} = Q_{r=a} + Q_{\text{vol}} + Q_{r=b} &= -C8\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} a^3 + C8\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} \left(a^3 - b^3 \right) + C4\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} 3b^3 \\
&= C4\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^3} \left(-2a^3 + 2a^3 - 2b^3 + 3b^3 \right) = C4\pi\epsilon_0 \frac{b^2 - a^2}{a^2}
\end{aligned}$$

ce qui est bien la même charge trouvée dans la partie (b) avec le théorème de Gauss :

$$Q_{r \leq b} = 4\pi\epsilon_0 C \left[\frac{b^2 - a^2}{a^2} \right]$$